Grado en Física – Análisis Matemático I
Ejercicios resueltos del examen de febrero de 2012

Ejercicio 1. (2 puntos) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x)=\frac{2x^2+6x+10}{x^2+1}\qquad (x\in\mathbb{R}).$$

a) Calcula los extremos relativos de f y comprueba que son extremos absolutos. Calcula la imagen de f y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Usando los resultados anteriores, estudia el número de soluciones de la ecuación $f(x)=m$ según el valor del número real m.

Solución. Como se trata de una función racional y, por tanto, derivable, para calcular los extremos relativos debemos calcular los puntos donde se anula la derivada. Un cálculo fácil da:

$$f'(x)=-2\frac{3x^2+8x-3}{(x^2+1)^2}$$

Los ceros de la derivada son las raíces de la ecuación $3x^2+8x-3=0$ que se calculan como de costumbre y son -3 y $1/3$. Dichos puntos son, pues, los únicos *posibles* extremos relativos de las función. Como nos piden que probemos que son extremos absolutos de nada sirve calcular la derivada segunda y evaluarla en dichos puntos pues eso solamente nos podría decir que son *extremos relativos*. Además, como nos piden los intervalos de monotonía, estudiaremos la variación del signo de la derivada primera. El signo de dicha derivada es el mismo del trinomio $-3x^2-8x+3=-3(x+3)(x-1/3)$. Tenemos que:

$$x<-3\Longrightarrow f'(x)<0\Longrightarrow f\downdownarrows \text{ en }]-\infty,-3]\Longrightarrow f(-3)<f(x)$$

$$-3<x<1/3\Longrightarrow f'(x)>0\Longrightarrow f\upuparrows \text{ en }[-3,1/3]\Longrightarrow f(-3)<f(x)<f(1/3)$$

$$1/3<x\Longrightarrow f'(x)<0\Longrightarrow f\downdownarrows \text{ en }[1/3,+\infty[\Longrightarrow f(x)<f(1/3)$$

Hemos obtenido que para todo $x\leqslant -3$ se verifica que $f(-3)\leqslant f(x)$. Esto no garantiza todavía que $f(-3)$ sea el valor mínimo absoluto de f porque la función es decreciente en $[1/3,+\infty[$ y no sabemos aún si en ese intervalo la función toma valores menores que $f(-3)$. Algo parecido ocurre con $f(1/3)$ pues se verifica que $f(x)\leqslant f(1/3)$ para todo $x\geqslant -3$ pero no sabemos si en $]-\infty,-3]$ la función toma valores mayores que $f(1/3)$. Para salir de dudas, vamos a calcular la imagen de f porque, además, ese resultado lo necesitaremos para el punto b).

Sabemos que la imagen de un intervalo por una función continua es un intervalo. Es fácil calcular la imagen en intervalos de monotonía.

En el intervalo $]-\infty,-3]$ la función es estrictamente decreciente. Como $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=2$ tenemos que $f(]-\infty,3])=[f(-3),2[=[1,2[$.

En el intervalo $[-3,1/3]$ la función es estrictamente creciente por lo que $f([-3,1/3])=[f(-3),f(1/3)]=[1,11]$.

En el intervalo $[1/3,+\infty[$ la función es estrictamente decreciente. Como $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=2$ tenemos que $f([1/3,+\infty[)=]2,f(1/3)]=]2,11]$.

A la vista de estos resultados está claro que $f(\mathbb{R})=[1,11]$ y que la función alcanza en -3 su mínimo absoluto y en $1/3$ su máximo absoluto.

Con estos resultados podemos ya responder al apartado b). Se trata de ver en cuantos puntos toma la función f un valor dado $m \in \mathbb{R}$.

Los valores $m = 1$ o $m = 11$ los toma f una sola vez en los puntos -3 y $1/3$ respectivamente. Es decir, para dichos valores de m la ecuación $f(x) = m$ tiene una solución.

Para $1 < m < 2$ la función toma dicho valor una vez en $]-\infty, -3[$ y otra vez en $]-3, 1/3[$. Es decir, para dichos valores de m la ecuación $f(x) = m$ tiene dos soluciones.

Para $2 < m < 11$ la función toma dicho valor una vez en $]-3, 1/3[$ y otra vez en $]1/3, +\infty[$. Es decir, para dichos valores de m la ecuación $f(x) = m$ tiene dos soluciones.

El valor $m = 2$ lo toma la función una sola vez en el intervalo $]-3, 1/3[$.

Para $m < 1$ y para $m > 11$ la ecuación $f(x) = m$ no tiene solución.

También puede procederse en este ejercicio de una forma más directa porque la función es muy sencilla. Una vez visto que en -3 hay un mínimo relativo, $f(-3) = 1$, y en $1/3$ hay un máximo relativo, $f(1/3) = 11$, para probar que dichos extremos son absolutos podemos probar directamente que para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica la desigualdad:

$$1 \leqslant \frac{2x^2 + 6x + 10}{x^2 + 1} \leqslant 2$$

Dicha desigualdad es muy fácil de probar. Pero es que podemos resolver también directamente el apartado b) del ejercicio (con lo cual probaremos también la desigualdad anterior) resolviendo directamente la ecuación $f(x) = m$. Tenemos que:

$$\frac{2x^2 + 6x + 10}{x^2 + 1} = m \iff (2-m)x^2 + 6x + 10 - m = 0$$

Para $m = 2$ esta ecuación tiene una solución única que es $x = -4/3$. Para $m \neq 2$ esta ecuación tendrá soluciones reales siempre que el discriminante sea mayor o igual que 0. Es decir se verifique que $36 - 4(10-m)(2-m) \geqslant 0$. Tenemos que:

$$36 - 4(10-m)(2-m) = 44 + 48m - 4m^2 = -4(m^2 - 12m + 11) = -4(m-1)(m-11)$$

Deducimos que $36-4(10-m)(2-m) \geqslant 0 \iff 1 \leqslant m \leqslant 11$. De esta forma hemos obtenido fácilmente que la ecuación $f(x) = m$ tiene dos soluciones reales distintas para $1 < m < 2$ y $2 < m < 11$ pues para dichos valores de m el discriminante es positivo. Para $m = 1$ y para $m = 11$ el discriminante se anula y hay una única solución (doble). Para $m < 1$ y para $m > 11$ la ecuación $f(x) = m$ no tiene solución.

Volvemos así a obtener los resultados anteriores y, además, hemos probado que la imagen de la función es el intervalo $[1, 11]$, por tanto que en -3 hay un mínimo absoluto y en $1/3$ un máximo absoluto. ☺

Ejercicio 2. (2 puntos) Un rectángulo tiene su base sobre el eje OX, su esquina inferior izquierda es $(0, 0)$ y su esquina superior derecha está en la gráfica de la función $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \qquad (x > 1).$$

a) Calcula las dimensiones del rectángulo de mínimo perímetro que se puede conseguir de esta forma.

b) ¿Hay un rectángulo, del tipo descrito arriba, cuya área sea extrema (máxima o mínima)?

Solución. Si es x la longitud de la base del rectángulo (se supone elegida una unidad de medida), la esquina superior derecha será el punto $(x, f(x))$. La altura del rectángulo viene dada por $f(x)$ y el perímetro viene dado por $p(x) = 2x + 2f(x)$. Se trata, por tanto, de calcular el mínimo absoluto de la función $p(x)$ para $x > 1$. Tenemos que:

$$p'(x) = 2 + 2f'(x) = 2 - \frac{2}{(x-1)^2}$$

Por tanto $p'(x) = 0 \Longleftrightarrow (x-1)^2 = 1$, es decir $x - 1 = 1$ o $x - 1 = -1$. Como debe ser $x > 1$ el único punto crítico de $p(x)$ que cumple dicha condición es $x_0 = 2$.

Como $p'(3/2) = 2 - 8 = -6 < 0$ y $p'(3) = 2 - 1 = 1 > 0$ y p' no se anula en los intervalos $]1,2[$ y $]2,+\infty[$, deducimos que:

$$1 < x < 2 \Longrightarrow p'(x) < 0 \Longrightarrow p \downdownarrows \text{ en } [1,2] \Longrightarrow p(2) < p(x)$$

$$2 < x \Longrightarrow p'(x) > 0 \Longrightarrow p \upuparrows \text{ en } [2,+\infty[\Longrightarrow p(2) < p(x)$$

Hemos probado así que el perímetro mínimo absoluto se alcanza para $x = 2$ y su valor es 6 (unidades de medida).

El área del rectángulo viene dada por la función:

$$A(x) = x f(x) = \frac{x}{x-1} \qquad (x > 1)$$

Su derivada es:

$$A'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0$$

Deducimos que dicha función es estrictamente decreciente y por tanto no tiene extremos. Observa que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} A(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} A(x) = 1$ por lo que $A(]1,+\infty[) =]1,+\infty[$. La función área no alcanza en $]1,+\infty[$ un valor mínimo (toma valores siempre mayores que 1 que pueden estar tan cerca de 1 como queramos pero sin alcanzar nunca dicho valor) ni un valor máximo (toma valores positivos tan grandes como queramos). ☺

Ejercicio 3. (1,5 puntos) Justifica que la ecuación

$$x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$$

tiene exactamente dos soluciones reales.

Solución. Definamos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = x \operatorname{sen} x + \cos x - x^2$. Dicha función es indefinidamente derivable en $\mathbb{R}$. Por supuesto, es continua y está definida en un intervalo. Tenemos que $f(-\pi) = f(\pi) = -1 - \pi^2 < 0$ y $f(0) = 1 > 0$. Por el teorema de Bolzano deducimos que hay puntos $c_1 \in]-\pi, 0[$ y $c_2 \in]0, \pi[$ en los que la función f se anula: $f(c_1) = f(c_2) = 0$. Veamos que dichos puntos son los únicos puntos donde la función se anula.

Tenemos que

$$f'(x) = \operatorname{sen} x + x \cos x - \operatorname{sen} x - 2x = x \cos x - 2x = x(\cos x - 2)$$

Como para todo $x \in \mathbb{R}$ es $\cos x - 2 < 0$, deducimos que la derivada de f se anula una sola vez (en $x = 0$). Como por el teorema de Rolle sabemos que entra cada dos ceros de una función derivable tiene que haber al menos un cero de la derivada, deducimos que la función f no puede tener más de dos ceros distintos. Por tanto, f tiene exactamente dos ceros.

También podemos razonar observando que para $x < 0$ es $f'(x) > 0$ por lo que f es estrictamente creciente en $]-\infty, 0]$, luego solamente puede anularse una vez en dicho intervalo. Para $x > 0$ es $f'(x) < 0$ por lo que f es estrictamente decreciente en $[0, +\infty[$, luego solamente puede anularse una vez en dicho intervalo. ☺

Ejercicio 4. (1,5 puntos) Calcula la primitiva $\displaystyle\int \frac{5x^2 - 10x + 9}{x^3 - 5x^2 + 9x - 5}\, dx$.

Solución. Se trata de una función racional propia (grado del denominador estrictamente mayor que el grado del numerador). Procederemos a la descomposición en fracciones simples. Para ello calculamos los ceros del denominador. Claramente $x = 1$ es uno de ellos. Dividiendo por Ruffini obtenemos que

$x^3-5x^2+9x-5=(x-1)(x^2-4x+5)$. Como el trinomio x^2-4x+5 tiene discriminante negativo ya no hay más raíces reales. La descomposición en fracciones simples es de la forma:

$$\frac{5x^2-10x+9}{(x-1)(x^2-4x+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2-4x+5}$$

Multiplicando por el denominador obtenemos:

$$5x^2-10x+9=A(x^2-4x+5)+(Bx+C)(x-1)$$

Haciendo $x=1$ obtenemos $A=2$. Haciendo $x=0$ obtenemos $9=5A-C$ de donde $C=1$. Identificando coeficientes de x^2 obtenemos $5=A+B$, de donde $B=3$. Tenemos que:

$$\int\frac{5x^2-10x+9}{x^3-5x^2+9x-5}\,\mathrm{d}x=\int\frac{2}{x-1}\,\mathrm{d}x+\int\frac{3x+1}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x$$

La primera primitiva es inmediata:

$$\int\frac{2}{x-1}\,\mathrm{d}x=2\log|x-1|$$

(te recuerdo que log es el logaritmo natural, llamado también logaritmo neperiano). Calculemos la segunda primitiva para ello completamos en el numerador la derivada del denominador:

$$\int\frac{3x+1}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x\quad=\int\frac{\frac{3}{2}(2x-4)+7}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\log(x^2-4x+5)+7\int\frac{1}{(x-2)^2+1}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{3}{2}\log(x^2-4x+5)+7\operatorname{arc\,tg}(x-1)$$

☺

Ejercicio 5. (1 punto) Estudia la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{((n+2)!)^3}{(n+1)^{3n}}9^n$.

Solución. Se trata de una serie de términos positivos. Aplicaremos el criterio del cociente.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{((n+3)!)^3 9^{n+1}}{(n+2)^{3(n+1)}}\frac{(n+1)^{3n}}{((n+2)!)^3 9^n}=\frac{(n+3)^3((n+2)!)^3 9^n 9(n+1)^{3n}}{(n+2)^3(n+2)^{3n}((n+2)!)^3 9^n}=$$

$$=9\frac{(n+3)^3}{(n+2)^3}\frac{(n+1)^{3n}}{(n+2)^{3n}}=9\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^3\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n}\to 9\,\mathrm{e}^{-3}=\frac{9}{\mathrm{e}^3}<1$$

Donde hemos tenido en cuenta que:

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n}=\left[\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n\right]^{-3}=\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\right]^{-3}\to\mathrm{e}^{-3}$$

O también, como se trata de una indeterminación $u_n^{v_n}$ del tipo 1^∞ con $u_n=\dfrac{n+1}{n+2}$ y $v_n=3n$, sabemos que $u_n^{v_n}\to\mathrm{e}^L\Longleftrightarrow v_n(u_n-1)\to L$. En nuestro caso es inmediato que $v_n(u_n-1)\to -3$.

Concluimos, por el criterio del cociente, que la serie es convergente. ☺

Ejercicio 6. (1 punto) Calcula el límite $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)}{(\log(1+x))^2}$.

Solución. Como $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}=1$, Se trata de una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Podemos aplicar la regla de L'Hôpital (¿qué haríamos sin ella?). Para ello derivamos numerador y denominador para obtener la función:

$$\frac{\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}\,\dfrac{x\cos x-\operatorname{sen} x}{x^2}}{\dfrac{1}{1+x}2\log(1+x)}=\frac{x}{\operatorname{sen} x}(1+x^2)\frac{x\cos x-\operatorname{sen} x}{2x^2\log(1+x)}$$

Puesto que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen} x}(1+x^2)=1$$

El límite pedido es igual al límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\operatorname{sen} x}{2x^2\log(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\operatorname{sen} x}{4x\log(1+x)+\dfrac{2x^2}{1+x}}=\lim_{x\to 0}(1+x)\frac{-\operatorname{sen} x}{4(1+x)\log(1+x)+2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x}{4(1+x)\log(1+x)+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{4\log(1+x)+6}=-\frac{1}{6}$$

Hemos aplicado la regla de L'Hôpital tres veces. Podemos hacer este límite de forma más sencilla si utilizamos que $\log(1+x)\sim x$ para $x\to 0$. Con lo que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{(\log(1+x))^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen} x}\,\frac{x\cos x-\operatorname{sen} x}{2x^3}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\operatorname{sen} x}{2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\operatorname{sen} x}{6x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{6x}=-\frac{1}{6}$$

Ahora hemos aplicado la regla de L'Hôpital dos veces. Todavía podemos hacer este límite de forma más sencilla si recordamos que cuando $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=1$ se verifica que $\log(h(x))\sim h(x)-1$ para $x\to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{(\log(1+x))^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x-x}{x^3}=-\frac{1}{6}$$

El último es uno de esos que deberías saberte de memoria porque se repite mucho. ☺

Ejercicio 7. (1 punto) Calcula el volumen de los cuerpos de revolución obtenidos al girar la región del plano comprendida entre los ejes coordenados y la gráfica de la función

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\qquad 0\leqslant x\leqslant 1$$

alrededor del eje de abscisas y alrededor del eje de ordenadas.

Solución. Para calcular el volumen cuando el giro es alrededor del eje de abscisas aplicaremos el método de los discos. El volumen pedido viene dado por:

$$\pi\int_0^1(f(x))^2\,dx=\pi\int_0^1\frac{1}{x^2+4}\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{\frac{1}{2}}{(x/2)^2+1}\,dx=\frac{\pi}{2}\Big[\operatorname{arc\,tg}(x/2)\Big]_{x=0}^{x=1}=\frac{\pi}{2}\operatorname{arc\,tg}(1/2)$$

Para calcular el volumen cuando el giro es alrededor del eje de ordenadas aplicaremos el método de los tubos. El volumen pedido viene dado por:

$$2\pi\int_0^1 xf(x)\,dx=2\pi\int_0^1 x\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx=\pi\int_0^1 2x(x^2+4)^{-1/2}\,dx=2\pi\Big[(x^2+4)^{1/2}\Big]_{x=0}^{x=1}=2\pi(\sqrt{5}-2)$$

☺